公開コピー誌

古典的不変式論・入門編

暗黒通信団

■はじめに

古典的不変式論をみなさんに紹介したくてこの本を書きました．何冊かに分けて書こうと思いましてこの本はその第一弾入門編です[*1]．不変式論とは多項式に (代数的な) 群が作用するときにどのような多項式が不変であるかという問題を考える分野です．群作用を考えるとき不変なものを求めるということは自然で基本的であり必須でもあります．不変式論は１９世紀に発展した分野ですが最近ではあまりそれ自身を研究する人はいなくなりましたが, 現代数学の血となり骨となり脈々と生きています．不変式論は何度死んでも不死鳥のように何度も蘇ると言われています．その魅惑の世界へ読者の方を誘いたいと思います．最初なれるまで抵抗があるかと思いましたので, まず一番簡単な 3 次形式の不変式論を入門編として提供いたします．3 次形式に的を絞って最短の距離で共変式環の決定問題に踏み込んで書きました．著者の見る限りではそのような入門書はないように思われます[*2]．是非この豊穣で肥沃な大地に立ち入ってみてください．また著者は単に古典案内ではなくこの分野は現代数学としても発展性があると思っています．この本の続きはこの本が売れれば書かれますが (笑), 待ちきれない方は文献に挙げた [3] を読んでみてください．この本を一読しておけば抵抗無く読み始めることができると思います．最後にこの本の計算は具体的なのでコンピューターを用いても結構ですのでどうか読者自身の手で計算, 確認してみてください[*3]．そうすることで抽象的と思われた理論が現実味を帯びてきます．曖昧な感触であったものが事実として体験として自分の心に迫ってきます．すると皆さんは当然のように 4 次形式, 5 次形式, またもっと一般の場合を考察をはじめるでしょう．不変式論は無限の広がりを持つものですから, そうなるのは当然の成り行きなのです．この本はそのキッカケ, 起爆剤として設計されています．この本の読者として一番主に設定しているのは理科系の大学生です．ですが意欲のある高校生にも暇を持て余しているニートの方にも読んで欲しいと思っています．前提とする知識は大学一年で習う微積分と線形代数と代数学の初歩です[*4]．ではお楽しみください！

◆謝辞　第二版の初版を熱心に読んでくださり, 多くの誤りや誤植を指摘してくださった方がいらっしゃいました．大変感謝しております．それらの間違いはこの版ではすべて修正されています．

❶ イントロダクション

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の多項式を議論の対象とする[*5]．これから不変式の議論をはじめるにあたって, まず簡単な不変式の例をいくつか見ることにする．

$$f(x,y) = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$$

という文字 x, y に関する二次形式を考える[*6]．この二次形式の判別式は

$$d = a_1^2 - a_0a_2$$

である．ここで

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{1}$$

[*1] 入門編の第二版です．

[*2] この本は線型代数や微積分などとも異なり高校でも大学でも今では扱われなくなった内容です．しかし今なお新鮮な題材であることも付け加えておきます．

[*3] 代数計算ソフトとしては Mathematica, Maxima, Maple 等がありますのでネットで調べてみてください．筆者は Mathematica を愛用していますがこれは有料です．Maxima は無料です．

[*4] 難しすぎるという意見を聞くことがあります．難しさの原因は計算がかなり複雑だからです．寝そべって読むと難しいと思いますがノートを開いて鉛筆を握って計算を自分の手でフォローすることによってかなりの部分が理解可能になると思います．

[*5] 標数 0 の体 k 上で議論も全く並行してできるので代数学の知識があるひとは一般の k を基礎体にしてよい．

[*6] 一般に x, y に関する n 次斉次多項式 $\sum_k \binom{n}{k} a_k x^k y^{n-k}$ を n 次基本形式と呼ぶ．二項係数をつけるのは計算式をきれいにするためのテクニックである．なおこのとき係数 a_i は数ではなくて文字として扱う．

という一次変換を考える．ここで行列式 $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ とする．$f(x,y)$ を座標 (x',y') でみると
$f(\alpha x'+\beta y',\gamma x'+\delta y')=$
$(\alpha^2a_0+2\alpha\gamma a_1+\gamma^2a_2){x'}^2+2(\alpha\beta a_0+\alpha\delta a_1+\beta\gamma a_1+\gamma\delta a_2)x'y'+(\beta^2a_0+2\beta\delta a_1+\delta^2a_2){y'}^2$ これを $f'(x',y')=a_0'{x'}^2+2a_1'x'y'+a_2'{y'}^2$ と書くとすれば，この新しく得られた二次形式の判別式 $d'={a_1'}^2-a_0'a_2'$ を計算すると

$$d'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2(a_1^2-a_0a_2)$$

となる．つまり

$$d'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2d \tag{2}$$

なる関係式が成り立つ．つまり判別式は一次変換の行列式の冪というスカラー倍を除いて不変である．この文字 a_0,a_1,a_2 に関する多項式 $d=a_1^2-a_0a_2$ をこの意味で不変式という．

次に三次形式

$$f(x,y)=a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$$

から生じる文字 a_0,a_1,a_2,a_3 に関する多項式で前述のような一次変換に対して不変性を持っているものを例示しよう．まずこの三次形式の判別式 d は

$$d=a_0^2a_3^2-6a_0a_1a_2a_3+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-3a_1^2a_2^2$$

である[*7]．ここで再び (1) なる一次変換を施して，$f'(x',y')=f(\alpha x'+\beta y',\gamma x'+\delta y')$ とすれば，

$$f'(x',y')=a_0'{x'}^3+3a_1'{x'}^2y'+3a_2'x'{y'}^2+a_3'{y'}^3$$

ただしここで

$$\begin{aligned}
a_0'&=\alpha^3a_0+3\alpha^2\gamma a_1+3\alpha\gamma^2a_2+\gamma^3a_3\\
a_1'&=\alpha^2\beta a_0+(\alpha^2\delta+2\alpha\beta\gamma)a_1+(\beta\gamma^2+2\alpha\gamma\delta)a_2+\gamma^2\delta a_3\\
a_2'&=\alpha\beta^2a_0+(\beta^2\gamma a_1+2\alpha\beta\delta)a_1+(\alpha\delta^2+2\beta\gamma\delta)a_2+\gamma\delta^2a_3\\
a_3'&=\beta^3a_0+3\beta^2\delta a_1+3\beta\delta^2a_2+\delta^3a_3
\end{aligned}$$

となる．このとき $d'={a'}_0^2{a'}_3^2-6{a'}_0{a'}_1{a'}_2{a'}_3+4{a'}_0{a'}_2^3+4{a'}_1^3{a'}_3-3{a'}_1^2{a'}_2^2$ を計算すると

$$d'=(\alpha\delta-\beta\gamma)^6d$$

となる[*8]．従ってこの場合も判別式 d は不変式である．

次に文字 a_i と文字 x,y を両方含む多項式で，一次変換に対してある規則性（共変性）を持つものを挙げよう．三次形式 $f(x,y)$ のヘッシアン (Hessian)h を次のように定義する:

$$h=\frac{1}{36}\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2f(x,y)}{\partial x\partial x} & \dfrac{\partial^2f(x,y)}{\partial x\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial^2f(x,y)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2f(x,y)}{\partial y\partial y}\end{pmatrix}$$

すると

$$\begin{aligned}
h&=h(a_0,a_1,a_2,a_3,x,y)\\
&=(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2
\end{aligned}$$

となる．するとこれも直接計算で確かめられることだが、a_i' は前述のものを踏襲して

$$h(a_0',a_1',a_2',a_3',x',y')=(\alpha\delta-\beta\gamma)^2h(a_0,a_1,a_2,a_3,x,y)$$

が成り立っている．このように文字 a_i と x,y を両方もっていて一次変換に対してこのような不変性を持つものを共変式 (covariant) という．

もう一つ共変式の例を挙げよう．三次形式 $f(x,y)$ とヘッシアン $h(x,y)$ から作られるヤコビアン (jacobian)j を考える．

[*7] 3 次式の判別式は [1] を参照のこと．または f(x,1)=0 という 3 次方程式が重根を持たない必要十分条件が $d\neq 0$ という説明で満足しているのもよい．つまり 2 次式同様に 3 次式にもそのような不変量があるということを知っているだけの状態でもかまわない．

[*8] 代数計算ソフトを用いて確認してほしい．

$$j = \frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

と定義する[*9]．すると

$$j = (2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3)x^3 + (3a_1^2a_2 - 6a_0a_2^2 + 3a_0a_1a_3)x^2y$$
$$+(-3a_1a_2^2 + 6a_1^2a_3 - 3a_0a_2a_3)xy^2 + (-2a_2^3 + 3a_1a_2a_3 - a_0a_3^2)y^3$$

となる．この j に対して次の共変性がなりたつ:

$$j(a_0', a_1', a_2', a_3', x', y') = (\alpha\delta - \beta\gamma)^3 j(a_0, a_1, a_2, a_3, x, y).$$

定義 2.1　多項式 $p(a_0, a_1, a_2, a_3, x, y) \in \mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3, x, y]$ が共変式であるとは,

$$p(a_0', a_1', a_2', a_3', x', y') = (\alpha\delta - \beta\gamma)^l p(a_0, a_1, a_2, a_3, x, y)$$

なる関係式があることと定義する．ここで l は 0 以上の整数である．

この定義によれば前述の f, d, h, j は共変式である．さて, 三次形式の共変式をすべて求める問題を考える．実は三次形式の任意の共変式は f, d, h, j の多項式として表示できる．さらにこの四つの共変式の間には $j^2 = f^2d - 4h^3$ という関係式があり, 本質的にはこれ以外の関係式はない．この不思議な事実を伝えたいというのが本書の目標である．しかし真の目的は読者に古典的不変式論の一般論への興味をもってもらうことにある．

この問題を解決するため Cayley（ケイリー）は膨大な計算を行い様々な現代数学の記号法を編み出した．また多項式に対する微分作用素を定義しリー環 $sl(2)$ の表現論を創始した．このように様々な発達を促す問題こそ良問というべきである．この急激な現代化はヒルベルトにより完全に現代数学となり, さらにはコホモロジー理論へと突き進んでいく．まさに疾風怒濤の革命期であった．

❷ 三次形式の係数変換の法則

前節で述べたことだがもう一度三次形式の係数の変換則について述べる．

$$f(x, y) = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$$

を三次形式として $f(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$ を x, y の多項式とみると

$$a_0'x^3 + 3a_1'x^2y + 3a_2'xy^2 + a_3'y^3$$

という新しい三次形式が生じる．この新しい係数 a_l' を $\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(l)}$ と書くことにする．すると

$$\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(0)} = \alpha^3a_0 + 3\alpha^2\gamma a_1 + 3\alpha\gamma^2a_2 + \gamma^3a_3$$
$$\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(1)} = \alpha^2\beta a_0 + (\alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma)a_1 + (\beta\gamma^2 + 2\alpha\gamma\delta)a_2 + \gamma^2\delta a_3$$
$$\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(2)} = \alpha\beta^2a_0 + (\beta^2\gamma + 2\alpha\beta\delta)a_1 + (\alpha\delta^2 + 2\beta\gamma\delta)a_2 + \gamma\delta^2a_3$$
$$\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(3)} = \beta^3a_0 + 3\beta^2\delta a_1 + 3\beta\delta^2a_2 + \delta^3a_3$$

となる．ρ を 4 次元の線形空間から 4 次元の線形空間への線形写像と見なすことが出来る．

ここで ρ の作用の合成の規則を与える．

$$\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\cdot\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right)\cdot a = \rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\cdot a\right)$$

と定める．通常の作用とは逆であることに注意する．

[*9] 3 で割るのは係数をきれいにするためである．

定理 3.2 $\rho\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\cdot\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \rho\left(\begin{pmatrix}\alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right)$

証明. $\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ を a_0, a_1, a_2, a_3 を基底とする 4 次元線形空間の一次変換とみるとその表現行列は, この基底に関して

$$\begin{pmatrix}\alpha^3 & 3\alpha^2\gamma & 3\alpha\gamma^2 & \gamma^3 \\ \alpha^2\beta & \alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma & \beta\gamma^2 + 2\alpha\gamma\delta & \gamma^2\delta \\ \alpha\beta^2 & \beta^2\gamma + 2\alpha\beta\delta & \alpha\delta^2 + 2\beta\gamma\delta & \gamma\delta^2 \\ \beta^3 & 3\beta^2\delta & 3\beta\delta^2 & \delta^3\end{pmatrix}$$

となる. 定理の主張の左辺をこの 4 次元の一次変換を与える行列の積と見なせば, ρ の合成の順序に注意しながら, 直接の計算により確認することが出来る. 証明終わり.

注意. $\mathrm{GL}(2) = \{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} : \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\}$ と書き, 一般線形群と呼ぶ. すると上記の定理は ρ は $\mathrm{GL}(2)$ の $\mathbb{C}^4$ への表現を定めるということを主張している[*10].

❸ 微分作用素

ここから多項式に対する微分作用素を定義する. その目的は共変式という扱いの難しい性質を半不変式という微分で定義された簡単な性質で表すことにある. これにより共変式を求める問題が半不変式を求める問題へと帰着され, さらに微分作用素が満たす関係式により, 共変式の個数を数えるということが可能となる.

$\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3]$ の単項式に次数と重さを定義する. a_l の次数を 1 として重さを l とし,

$$\deg(a_l) = 1,\ \mathrm{weight}(a_l) = l$$

とかく. 単項式 $a_0^{j_0}a_1^{j_1}a_2^{j_2}a_3^{j_3}$ に対して

$$\deg(a_0^{j_0}a_1^{j_1}a_2^{j_2}a_3^{j_3}) = j_0 + j_1 + j_2 + j_3$$
$$\mathrm{weight}(a_0^{j_0}a_1^{j_1}a_2^{j_2}a_3^{j_3}) = j_1 + 2j_2 + 3j_3$$

と定義する.

$\varphi(a) \in \mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3]$ が同次多項式であるとはすべての項が等しい次数を持つことと定義し, 同重多項式であるとはすべての項の重さが等しいことと定義する.

同次同重多項式 $\varphi(a)$ が与えられたとき, その指数 $\mathrm{ind}(\varphi)$ を

$$\mathrm{ind}(\varphi) = 3\deg(\varphi) - 2\mathrm{weight}(\varphi)$$

と定義する.

次に多項式環の微分という概念を定義する[*11]. X が $\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3] = \mathbb{C}[a]$ から $\mathbb{C}[a]$ への線形写像で $\varphi, \phi \in \mathbb{C}[a]$ に対して

$$X(\varphi\cdot\phi) = (X\varphi)\cdot\phi + \varphi\cdot X\phi$$

が成り立つとき[*12], X は $\mathbb{C}[a]$ の微分であるという.

単項式 $a_0^{j_0}a_1^{j_1}a_2^{j_1}a_3^{j_3}$ にたいして

$$X(a_0^{j_0}a_1^{j_1}a_2^{j_1}a_3^{j_3}) = \sum_{l=0}^{3}(Xa_l)(j_l a_0^{j_0}\cdots a_l^{j_l-1}\cdots a_3^{j_3})$$

がなりたつことが繰り返しライプニッツ則を用いることでわかる. よって $\varphi \in \mathbb{C}[a]$ に対して

$$X\varphi = \sum_{l=0}^{3} Xa_l\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial a_l}$$

が成り立つ. 従って $Xa_l = k_l(a)(l = 0, 1, 2, 3)$ とおけば $\mathbb{C}[a]$ の微分として

$$X = \sum_{l=0}^{3} k_l(a)\cdot\frac{\partial}{\partial a_l}$$

となる. この等式から X は $Xa_l(l = 0, 1, 2, 3)$ の値で完全に決まることが判る. よって次の補題がなりたつ.

[*10] この注意は数学を専門とする人のみ理解できればよい.
[*11] 代数学では導分 (derivation) と呼ばれるものであるがここではわかりやすく微分とした.
[*12] これをライプニッツ則という.

補題 4.3　X, Y を $\mathbb{C}[a]$ の二つの微分とするとき,

$$Xa_l = Ya_l (l = 0, 1, 2, 3)$$

ならば微分として $X = Y$ である.

二つの微分 X, Y に対して, そのリー積を

$$[X, Y] = XY - YX$$

と定めるとこれも微分である. 何故なら

$[X, Y](\varphi\phi) = (XY - YX)(\varphi\phi) = X((Y\varphi)\phi + \varphi(Y\phi)) - Y((X\varphi)\phi + \varphi(X\phi))$

$= (XY\varphi)\phi + Y\varphi \cdot X\phi + X\varphi \cdot Y\phi + \varphi \cdot XY\phi - ((YX\varphi)\phi + X\varphi \cdot Y\phi + Y\varphi \cdot X\phi + \varphi YX\phi)$

$= ((XY - YX)\varphi)\phi + \varphi \cdot (XY - YX)\phi$

となるからである.

❹ Cayley-Aronhold の微分作用素

不変式の問題において特に重要な $\mathbb{C}[a]$ に作用する Cayley-Aronhold の微分作用素 $\mathcal{H}, \mathcal{D}, \Delta$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= 3a_0 \frac{\partial}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} - a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} - 3a_3 \frac{\partial}{\partial a_3} \\
\mathcal{D} &= a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} \\
\Delta &= 3a_1 \frac{\partial}{\partial a_0} + 2a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_3 \frac{\partial}{\partial a_2}
\end{aligned}$$

これらは $\mathbb{C}[a]$ の微分である. これらを作用させたとき, 次数は変化しないが, 重さについては次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathrm{weight}(\mathcal{H}\varphi) &= \mathrm{weight}(\varphi) \\
\mathrm{weight}(\mathcal{D}\varphi) &= \mathrm{weight}(\varphi) - 1 \\
\mathrm{weight}(\Delta\varphi) &= \mathrm{weight}(\varphi) + 1
\end{aligned}$$

次の関係式は大事である.

補題 5.4

$$[\mathcal{D}, \Delta] = \mathcal{H}, [\mathcal{H}, \mathcal{D}] = 2\mathcal{D}, [\mathcal{H}, \Delta] = -2\Delta$$

証明. a_0, a_1, a_2, a_3 への両辺の作用が一致することをみればよい. $l = 0, 1, 2, 3$ とするとき

$[\mathcal{D}, \Delta]a_l = \mathcal{D}\Delta a_l - \Delta\mathcal{D}a_l = ((3 - l)(l + 1) - l(3 - l + 1))a_l = (3 - 2l)a_l = \mathcal{H}a_l$

$[\mathcal{H}, \mathcal{D}]a_l = \mathcal{H}\mathcal{D}a_l - \mathcal{D}\mathcal{H}a_l = (l(3 - 2l + 2) - (3 - 2l)l)a_{l-1} = 2la_{l-1} = 2\mathcal{D}a_l$

$[\mathcal{H}, \Delta]a_l = \mathcal{H}\Delta a_l - \Delta\mathcal{H}a_l = ((3 - l)(3 - 2l - 2) - (3 - l)(3 - 2l))a_{l+1} = -2(3 - l)a_{l+1}$

$= -2\Delta a_l$

証明終わり.

この関係式は後程, 大変重要になる[*13].

補題 5.5　$\varphi(a)$ が同次同重多項式のとき

$$\mathcal{H}\varphi(a) = \mathrm{ind}(\varphi)\varphi(a)$$

である.

---

*13 巻末の付録を参照のこと.

証明. $\varphi(a) = a_0^{j_0} a_1^{j_1} a_2^{j_2} a_3^{j_3}$ と単項式として証明すれば十分である.

$$\mathcal{H}(\varphi(a)) = \mathcal{H}(a_0^{j_0} a_1^{j_1} a_2^{j_2} a_3^{j_3}) = \sum_{l=0}^{3}(3-2l) j_l a_0^{j_0} a_1^{j_1} a_2^{j_2} a_3^{j_3}$$

$$= \left\{ 3\sum_{l=0}^{3} j_l - 2\sum_{l=0}^{3} l j_l \right\} \varphi(a) = \mathrm{ind}(a_0^{j_0} a_1^{j_1} a_2^{j_2} a_3^{j_3})\varphi(a)$$

証明終わり.

❺ 半不変式とその特徴づけ

さて, ここで今まで定義した微分作用素を用いて半不変式を定義する. これは後に共変式と一対一の対応をもつことが証明される. 半不変式は微分作用素で定義されるので様々な扱い方ができる.

定義 6.6　$\varphi(a) \in \mathbb{C}[a] = \mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3]$ が半不変式 (semi-invariant) であるとは

$$\mathcal{D}\varphi(a) = 0$$

であることと定義する. また d 同次 p 同重半不変式を (d, p) 半不変式という.

$\varphi(a) = \sum_{d,p} \varphi_{d,p}(a)$ 同次同重分解とするとき, $\varphi(a)$ が半不変式であることの必要十分条件は各 $\varphi_{d,p}(a)$ が半不変式であることである. 何故なら

$$\deg(\mathcal{D}\varphi_{d,p}(a)) = d$$

$$\mathrm{weight}(\mathcal{D}\varphi_{d,p}(a)) = p - 1$$

したがって $\mathcal{D}\varphi(a) = 0$ は $\mathcal{D}\varphi_{d,p}(a) = 0$ は同値となる.

これから半不変式であるという性質を言い替える. まず次の補題を用意する.

補題 6.7　$\varphi(a)$ を (d, p) 多項式とする. このとき $\varphi(a)$ が半不変式である事と

$$\varphi\left(\rho\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right) = \varphi(a)$$

が任意の $t \in \mathbb{C}$ に対して成り立つことは同値である.

証明. $g(a) = a_0^{j_0} a_1^{j_1} a_2^{j_2} a_3^{j_3}$ という単項式に対して

$$g\left(\rho\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right) = g(a) + \mathcal{D}g(a)t + \frac{1}{2!}\mathcal{D}^2 g(a)t^2 + \frac{1}{3!}\mathcal{D}^3 g(a)t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\mathcal{D}^n g(a)t^n + \cdots$$

が成り立つ. ここで和は有限和である. 何故なら

$$a_0' = \left(\rho\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(0)} = a_0$$

$$a_1' = \left(\rho\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(1)} = a_0 t + a_1$$

$$a_2' = \left(\rho\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(2)} = a_0 t^2 + 2a_1 t + a_2$$

$$a_3' = \left(\rho\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right)_{(3)} = a_0 t^3 + 3a_1 t^2 + 3a_2 t + a_3$$

であるから

$$g(a_0', a_1', a_2', a_3') = a_0^{j_0}(a_1 + a_0 t)^{j_1}(a_2 + 2a_1 t + a_0 t^2)^{j_2}(a_3 + 3a_2 t + 3a_1 t^2 + a_0 t^3)^{j_3}$$

右辺の t の 0 次の項は $g(a)$ である. 次に t の 1 次の項を計算する. $a_0^{j_0}(a_1 + a_0 t)^{j_1}(a_2 + 2a_1 t)^{j_2}(a_3 + 3a_2 t)^{j_3}$

$= g(a) + (j_1 a_0^{j_0} a_1^{j_1 - 1} a_2^{j_2} a_3^{j_3} + 2j_2 a_0^{j_0} a_1^{j_1} a_2^{j_2 - 1} a_3^{j_3} + 3j_3 a_0^{j_0} a_1^{j_1} a_2^{j_2} a_3^{j_3 - 1})t + O(t^2)$

$= g(a) + \mathcal{D}g(a)t + O(t^2)$

ここで, $O(t^2)$ はランダウの記号であり t の 2 次以上の多項式であることを意味する．この 1 次の項の証明より

$$\frac{d}{dt}\varphi\left(\rho\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right)\Bigg|_{t=0} = \mathcal{D}\varphi(a)$$

という微分方程式を得る．よって

$$\frac{d^n}{dt^n}\varphi\left(\rho\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right)\Bigg|_{t=0} = \mathcal{D}^n\varphi(a)$$

を得る．この事実を用いて Taylor 展開すれば補題 6.7 はすぐに従う．証明終わり．

この補題を例で確認してみよう．$\varphi(a) = 2a_1^3 - 3a_0a_1a_2 + a_0^2a_3$ とするとき,

$$\mathcal{D}\varphi(a) = 0$$

を直接計算することによって確認してほしい．その次に

$$\varphi(a_0, a_1 + ta_0, a_2 + 2a_1t + a_0t^2, a_3 + 3a_2t + 3a_1t^2 + a_0t^3) = \varphi(a)$$

をやはり直接計算によって確かめてほしい．

それでは半不変式の言い替えを行う．

定理 6.8　$\varphi(a)\mathbb{C}[a]$ が (d,p) 半不変式であることの必要十分条件は

$$\varphi\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right) = \alpha^{3d-2p}(\alpha\delta)^p\varphi(a)$$

が成り立つ事である．

証明.

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{\beta}{\delta}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

なので

$$\varphi\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right) = \varphi\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot\rho\begin{pmatrix}1 & \frac{\beta}{\delta}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot a\right)$$

$$= \varphi\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right)$$

ここで

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{\delta}{\alpha}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

であることと

$$\rho\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\cdot a = (\alpha^3a_0, \alpha^3a_1, \alpha^3a_2, \alpha^3a_3)$$

と

$$\rho\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{\delta}{\alpha}\end{pmatrix}\cdot a = \left(a_0, \frac{\delta}{\alpha}a_1, \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2a_2, \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^3a_3\right)$$

であること, 及び $\varphi(a)$ が d 次同次 p 重同重多項式であることを組み合わせると,

$$\varphi\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right) = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^p(\alpha)^{3d}\varphi(a) = (\alpha\delta)^p\alpha^{3d-2p}\varphi(a)$$

よって

$$\varphi\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot a\right) = \alpha^{3d-2p}(\alpha\delta)^p\varphi(a)$$

を得る．証明終わり．

❻ Robert の対応

この節で半不変式と共変式の間に一対一対応があることを見る．特に共変式を数える問題を半不変式を数える問題に帰着できることを見る．

$F(a;x,y)\in\mathbb{C}[a_0,a_1,a_2,a_3,x,y]$ が x,y に関して m 次斉次であり

$$F(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\cdot a;x,y)=(\alpha\delta-\beta\gamma)^pF(a;\alpha x+\beta y,\gamma x+\delta y)$$

を満たすものを $(3,m,p)$ 共変式と呼ぶことにする．3 は三次形式から来ている．

$$F(a;x,y)=c_0(a)x^m+\cdots+\binom{m}{k}c_k(a)x^{m-k}y^k+\cdots+c_m(a)y^m$$

と書くとき

$$F(a;1,0)=c_0(a)$$

であるが, これが半不変式であることを見よう．

$$F(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot a;x,y)=(\alpha\delta)^pF(a;\alpha x+\beta y,\delta y)$$

$$F(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot a;1,0)=(\alpha\delta)^pF(a;\alpha,0)=(\alpha\delta)^p\alpha^mF(a;1,0)$$

よって

$$c_0(\rho\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\cdot a)=(\alpha\delta)^p\alpha^mc_0(a)$$

であることが判り, $c_0(a)$ が半不変式であることが判る．次に $c_0(a)$ が同次多項式であることを見る．

$$F(\rho\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\cdot a;x,y)=(\alpha^2)^pF(a;\alpha x,\alpha y)$$

の両辺に $(x,y)=(1,0)$ を代入すれば

$$F(\rho\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\cdot a;1,0)=(\alpha^2)^pF(a;\alpha,0)=(\alpha^2)^p\alpha^mF(a;1,0)$$

よって

$$c_0(\alpha^3a_0,\alpha^3a_1,\alpha^3a_2,\alpha^3a_3)=\alpha^{2p+m}c_0(a)$$

を得る．これは $c_0(a)$ は同次多項式でありその次数を d とすると

$$3d=2p+m$$

という関係式が成り立つことを意味している．以上をまとめると

命題 7.9　$F(a;x,y)$ を $(3,m,p)$ 共変式とするとき $F(a;1,0)$ は (d,p) 半不変式である．ここで

$$m=3d-2p$$

である．

共変式 $F(a;x,y)$ から半不変式 $c_0(a)=F(a;1,0)$ を作るとどのくらい情報が失われるのだろう? 実はまったく情報は失われていず $c_0(a)$ から $F(a;x,y)$ を復元できる．共変式というのは各項がバラバラにできているのではなく調和と秩序を持っているのである．逆にいえば共変式というのはそれだけ多項式の中でも特殊なものということができる．さてそれでは $c_0(a)$ から $F(a;x,y)$ が復元されることの議論を始めよう．まず

$$F(\rho\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\cdot a;x,y)=F(a;x,y)+\Delta F(a;x,y)t+O(t^2)$$

が前節と同様に証明できる．よって

$$\Delta F(a;x,y)=\left.\frac{d}{dt}F(\rho\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\cdot a;x,y)\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}F(a;x,xt+y)\right|_{t=0}=\frac{\partial}{\partial y}F(a;x,y)$$

よって

$$\Delta F(a;x,y)=\frac{\partial}{\partial y}F(a;x,y)$$

ここで $(x,y)=(1,z)$ と代入して $F(a;z)=F(a;1,z)$ とおくと

$$\Delta F(a;z)=\frac{d}{dz}F(a;z)$$

という関係式が得られる．

$$F(a;z)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}c_k(a)z^k$$

にこの微分方程式を適用すると

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\Delta c_k(a)z^k=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}kc_k(a)z^{k-1}$$

という等式を得る．z^{k-1} の係数を比べて

$$\binom{m}{k}c_k(a)=\frac{1}{k}\binom{m}{k-1}\Delta c_{k-1}(a)$$

よって

$$c_k(a)=\frac{(m-k)!}{(m-k+1)!}\Delta c_{k-1}(a)$$

この等式を繰り返し用いることにより

$$c_k(a)=\frac{(m-k)!}{(m-k+1)!}\frac{(m-k+1)!}{(m-k+2)!}\cdot\cdots\cdot\frac{(k-1)!}{k!}\Delta^k c_0(a)$$

を得る．これを整理すれば

$$c_k(a)=\frac{(m-k)!}{m!}\Delta^k c_0(a)$$

よって

$$\binom{m}{k}c_k(a)=\frac{1}{k!}\Delta^k c_0(a)$$

を得る．以上をまとめて次の命題を得る．

命題 7.10　$F(a;x,y)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}c_k x^{m-k}y^k$ を $(3,m,p)$ 共変式として $F(a;z)=F(a;1,z)$ とおくとき $m=3d-2p$ を満たす d が存在して $c_0(a)$ は (d,p) 不変式であり

$$F(a;z)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\Delta^k c_0(a)z^k$$

である．また

$$F(a;x,y)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\Delta^k c_0(a)x^{m-k}y^k$$

となる．

次に $c(a)$ を (d,p) 半不変式とするとき

$$F(a;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Delta^k c(a)z^k$$

によって $F(a;z)$ を定める．この和は有限和であることに注意する．$\Delta^k\varphi(a)\neq 0$ となる最大の k を n とすると

$$F(a;z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Delta^k c(a)z^k$$

である．ここで $f(a)$ を半不変とは限らない一般の a に関する多項式とすると

$$\frac{d}{dz}f(\rho\begin{pmatrix}1&0\\z&1\end{pmatrix}\cdot a)\Big|_{z=0}=\Delta f(a)$$

という微分方程式が成り立つことに注意すると[*14]

$$f\left(\rho\begin{pmatrix}1&0\\z&1\end{pmatrix}\cdot a\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Delta^k f(a)z^k$$

[*14] 類似した微分方程式が既に出ている．

が成り立つことが判る．よって

$$F(a;z)=c\left(\rho\begin{pmatrix}1&0\\z&1\end{pmatrix}\cdot a\right)$$

が成り立つ．

さて $F(\rho\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\cdot a;z)$ を計算しよう．

$$F(\rho\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\cdot a)=c\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\cdot\rho\begin{pmatrix}1&0\\z&1\end{pmatrix}\cdot a\right)$$
$$=c\left(\rho\begin{pmatrix}\alpha+\beta z&\beta\\\gamma+\delta z&\delta\end{pmatrix}\cdot a\right)=c\left(\rho\begin{pmatrix}1&0\\\frac{\gamma+\delta z}{\alpha+\beta z}&1\end{pmatrix}\cdot\rho\begin{pmatrix}\alpha+\beta z&\beta\\0&\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha+\beta z}\end{pmatrix}\cdot a\right)$$
$$=(\alpha+\beta z)^{3d-2p}(\alpha\delta-\beta\gamma)^pc\left(\rho\begin{pmatrix}1&0\\\frac{\gamma+\delta z}{\alpha+\beta z}&1\end{pmatrix}\cdot a\right)$$

よって

$$F(\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\cdot a;z)=(\alpha+\beta z)^{3d-2p}(\alpha\delta-\beta\gamma)^pF(a;\frac{\gamma+\delta z}{\alpha+\beta z})$$

を得る．このことは $m=3d-2p$ とおくとき

$$F(a;x,y)=x^mF(a;\frac{y}{x})$$

と定義すれば $F(a;x,y)$ は $(3,m,p)$ 共変式であることを意味している．以上をまとめて次の Robert の定理を得る．

定理 7.11 $m=3d-2p$ を満たす負ではない整数 d,p,m が与えられているとする．このとき (d,p) 半不変式全体の集合と $(3,m,p)$ 共変式全体の集合の間に一対一の対応がある．$c(a)$ を (d,p) 半不変式に対応する $(3,m,p)$ 共変式 $F(a;x,y)$ は

$$F(a;x,y)=x^mc\left(\rho\begin{pmatrix}1&0\\\frac{y}{x}&1\end{pmatrix}\cdot a\right)$$

で与えられ，逆に $(3,m,p)$ 共変式 $F(a;x,y)$ に対応する (d,p) 半不変式 $c(a)$ は

$$c(a)=F(a;1,0)$$

で与えられる．この二つの対応は互いに逆対応になっている．

この定理により次の系を得る．

系 7.12 (d,p) 半不変式 $\varphi(a)$ が不変式であるための必要十分条件は $m=3d-2p=0$ すなわち $3d=2p$ が成り立つことである．

証明. (d,p) 半不変式を Robert の定理で共変式に対応させたときに x,y について 0 次になるためには $m=3d-2p=0$ であることが必要十分である．

❼ Cayley-Sylvester の個数定理

$\mathbb{C}[a]=\mathbb{C}[a_0,a_1,a_2,a_3]$ 内の d 同次 p 同重多項式は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間となるが，それを $V_{3,d,p}$ と書く．$\varphi(x,z)$ を x,z の形式的ベキ級数として次のように定める:

$$\varphi(x,z)=\sum_{d,p=0}^{\infty}(\dim V_{3,d,p})x^pz^d.$$

これを $\dim V_{3,d,p}$ の母関数 (generating function) という[*15]

以下では $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ という形式的ベキ級数展開を頻繁に用いる．

補題 8.13 次の形式的ベキ級数として等式が成り立つ．

$$\varphi(x,z)=\frac{1}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)}$$

[*15] 数列 $\{a_n\}$ の増大度を定量的に調べたいとき $f(x)=\sum_n a_nx^n$ を考えることはよく行われる．この関数を母関数という．$f(x)$ が決定されてしまえば個別の a_n を知ることは容易い．

証明. $\dim V_{3,d,p}$ は次の連立一次方程式の負でない整数解の個数に等しい:

$$\sum_{l=0}^{3} y_l = d$$

$$\sum_{l=0}^{3} l y_l = p.$$

この方程式の解の個数は補題の中の等式の右辺の $x^p z^d$ の係数に等しい.

次に $\varphi(x,z) = \sum_{d=0}^{\infty} \varphi_d(x) z^d$ として $\varphi_d(x)$ を定める. 即ち

$$\varphi_d(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (\dim V_{3,d,p}) x^p$$

として定める. これは $\varphi(x,z)$ を z についての形式的ベキ級数とみたときの z^d の係数である. このとき $\varphi_d(x)$ は次のような具体的な表示を持つ.

補題 8.14

$$\varphi_d(x) = \frac{(1-x^4)(1-x^5)\cdot\cdots\cdot(1-x^{3+d})}{(1-x)(1-x^2)\cdot\cdots\cdot(1-x^d)}$$

証明. d に関する帰納法で示す. まず $\varphi_0(x) = 1$ であるから

$$\varphi_d(x) = \frac{1-x^{3+d}}{1-x^d} \cdot \varphi_{d-1}(x)$$

を言えばよい. ところで直接代入すれば

$$\varphi(x, xz) = \frac{1-z}{1-x^4 z} \cdot \varphi(x,z)$$

が判る. これを

$$(1-x^4 z)\varphi(x,xz) = (1-z)\varphi(x,z)$$

と整理して, z^d の係数を比較すれば

$$x^d \varphi_d(x) - x^{3+d}\varphi_{d-1}(x) = \varphi_d(x) - \varphi_{d-1}(x)$$

を得る. これから

$$\varphi_d(x) = \frac{1-x^{3+d}}{1-x^d}\varphi_{d-1}(x)$$

を得る. 証明終わり.

さて a_0, a_1, a_2, a_3 の (d,p) 半不変式全体の空間を $\mathcal{S}_3(d,p)$ と書くことにする. このとき次の Cayley-Sylvester の個数定理が成り立つ.

定理 8.15 (d,p) 半不変式の空間 $\mathcal{S}_3(d,p)$ の次元は

$$\frac{(1-x^4)(1-x^5)\cdot\cdots\cdot(1-x^{3+d})}{(1-x^2)(1-x^3)\cdot\cdots\cdot(1-x^d)}$$

を x の形式的ベキ級数とみたときの x^p の係数に等しい. (但し $3d-2p \geq 0$ とする.)

証明. 巻末の付録の $sl(2)$ の表現論を用いると

$$\dim\mathcal{S}_3(d,p) = \dim(V_{3,d,p}) - \dim(V_{3,d,p-1})$$

が成り立つことが判る[*16]. よって, $f(x)$ を x の形式的ベキ級数とするとき $f(x)\big|_p$ で x^p の係数を表すとすると,

$$\dim\mathcal{S}_3(d,p) = \{\varphi_d(x)\}\big|_p - \{x\varphi_d(x)\}\big|_p = \{(1-x)\varphi_d(x)\}\big|_p$$

よって

$$\dim\mathcal{S}_3(d,p) = \left.\frac{(1-x^4)(1-x^5)\cdots(1-x^{3+d})}{(1-x^2)\cdots(1-x^d)}\right|_p$$

となることが判る.

次の系は Hermite の相互律と呼ばれていて次の節で用いる.

[*16] ここは読者の興味の持ち方によって, この事実を認めてから先に進めてあとから付録を読むか, いったん付録を読んでから戻ってくるか選んでほしい. 認めてしまって付録を読まないという読み方もある.

系 8.16

$$\dim\mathcal{S}_3(d,p) = \left.\frac{(1-x^{d+1})(1-x^{d+2})(1-x^{d+3})}{(1-x^2)(1-x^3)}\right|_p$$

証明. 次の恒等式に注目すればよい.

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-x^4)\cdots(1-x^{3+d})}{(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^d)}\\
&= \frac{(1-x)\cdot(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdot(1-x^4)\cdots(1-x^{3+d})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^d)\cdot(1-x^2)(1-x^3)}\\
&= \frac{(1-x^{d+1})(1-x^{d+2})(1-x^{d+3})}{(1-x^2)(1-x^3)}
\end{aligned}$$

❽ 三次形式の共変式環の決定

三次形式 $f(a;x,y) = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$ の共変式全体を $\mathcal{A}$ と書く. $\mathcal{A}$ は $\mathbb{C}[a_0,a_1,a_2,a_3;x,y]$ の部分環である[*17].

さて $N(3,r,p)$ を三次形式の次数 r で重さ p の共変式全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元とし, $A(3,r)$ を次数 r の共変式全体のベクトル空間の次元とする[*18]. 系 8.16 と Robert の定理 7.11 により

$$N(3,r,p) = \dim\mathcal{S}_3(r,p) = \frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})(1-x^{r+3})}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

共変式の指数 m, 次数 r, 重さ p に対して $m = 3r - 2p$ 即ち $2p = 3r - m$ なる関係式があるから $3r$ が偶数のときは $p = 0,1,2,\cdots,\frac{3r}{2}$ を動くから

$$A(3,r) = \bigoplus_{p=0}^{\frac{3r}{2}} N(3,r,p)$$

であるから $\rho(x) = \frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})(1-x^{r+3})}{(1-x^2)(1-x^3)}$ とおき

$$\rho(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k + \cdots$$

とおくとき

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{\frac{3r}{2}}$$

を求めたい. よって $q = \frac{3r}{2}$ とおくとき

$$A(3,r) = \left.(\rho(x)x^q + \rho(x)x^{q-1} + \cdots + \rho(x))\right|_q$$

となる. よって r が偶数のとき

$$A(3,r) = \left.\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})(1-x^{r+3})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{\frac{3r}{2}}$$

を得る. 同様に r が奇数のとき

$$A(3,r) = \bigoplus_{p=0}^{\frac{3r-1}{2}} N(3,r,p)$$

であるから

$$A(3,r) = \left.\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})(1-x^{r+3})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{\frac{3r-1}{2}}$$

以上の準備の下にイントロダクションで述べた事を証明しよう. まず三次形式の共変式 $\mathcal{A}$ の元を四つ挙げる. まず三次形式

$$f = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3.$$

それから $f(a;x,y)$ の Hessian

$$h = (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)xy + (a_1a_3 - a_2^2)y^2.$$

[*17] $\mathcal{A}$ は和と積で閉じているということである.

[*18] 文字 d は別のものに使うのでここから次数に r を用いる.

そして f と h の Jacobian

$$j=(2a_1^3-3a_0a_1a_2)x^3+(3a_1^2a_2-6a_0a_2^2+3a_0a_1a_3)x^2y$$
$$+(-3a_1a_2^2+6a_1^2a_3-3a_0a_2a_3)xy^2+(-2a_2^3+3a_1a_2a_3-a_0a_3^2)y^3.$$

最後に三次形式 $f(a;x,y)$ の判別式

$$d=a_0^2a_3^2-6a_0a_1a_2a_3+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-3a_1^2a_2^2.$$

次の定理の証明が目標である.

定理 9.17　三次形式の共変式環は

$$\mathbb{C}[f,h,j,d]$$

である. また次数 6, 重さ 6 の線型空間に

$$j^2=f^2d-4h^3$$

という関係式があり, 任意の f,h,j,d の関係式は $j^2-f^2d+4h^3$ で割り切れる.
言い換えれば, F,H,D,J を不定元とするとき共変式環 $\mathcal{A}$ は

$$\mathbb{C}[F,H,D,J]/(J^2-F^2D+4H^3)$$

と同型である.

(証明) 次数と重さの小さい共変式を表に書くと次のようになる[*19].

共変式	f	h	j	d	j^2	f^2d	h^3
a についての次数	1	2	3	4	6	6	6
a についての重さ	0	2	3	6	6	6	6

この表に a についての次数 6 で重さ 6 の共変式が 3 つ現れている. さらに f,j,d,h で生成される次数 6 で重さ 6 の共変式はこの 3 つで尽きる.
一方で

$$N(3,6,6)=\left.\frac{(1-x^7)(1-x^8)(1-x^9)}{(1-x^2)(1-x^3)}\right|_6=\left.\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}\right|_6$$

なので

$$N(3,6,6)=\left.(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\right|_6=2$$

よって次数 6 かつ重さ 6 の共変式のベクトル空間の次元は 2 しかない. このことから表にある 3 個の共変式には 1 次の関係式が存在することになる. 即ち

$$j^2=\lambda f^2d+\mu h^3$$

なる $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ が存在する. 左辺の $a_0^2a_3^4y^6$ と $a_2^6y^6$ の係数はそれぞれ 1 と 4 であり, 右辺のそれはそれぞれ λ と $-\mu$ である. よって $\lambda=1,\mu=-4$ となり

$$j^2=f^2d-4h^3$$

という関係式を得る.

最後に, 次数 6 かつ重さ 6 以外の共変式は $f^\alpha h^\beta d^\gamma j^\delta$ ここで $\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3,\cdots,\delta=0,1$ で生成され線型関係がないこと見る. まず線型関係がないことをみる. もし $j\in\mathbb{C}[f,h,d]$ ならば $j=f^\alpha h^\beta d^\gamma$ とかけ両辺の次数を比べると

$$3=\alpha+2\beta+4\gamma$$

重さを比べると

$$3=2\alpha+3\beta+6\gamma$$

となるので, この連立方程式の解 α,β,γ は存在しない. よって

$$j\notin\mathbb{C}[f,h,d]$$

[*19] ここで次数と重さは Robert の定理により半不変式に変換して計算している. 以下 Robert の定理により半不変式と共変式は断りなく同一視する.

が判る．よって

$$f^\alpha h^\beta d^\gamma j^\delta, (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3, \cdots, \delta = 0, 1)$$

は一次独立である．次数が 7 以上のところで $f^\alpha h^\beta d^\gamma j^\delta, (\delta = 0, 1)$ が共変式を生成していることを示せば証明は完成する．

さて

$$\deg(f^\alpha h^\beta d^\gamma j^\delta) = \alpha + 2\beta + 4\gamma + 3\delta, (\delta = 0, 1)$$

であるから a についての次数が r の $\mathbb{C}[f, h, d, j]$ の元の作るベクトル空間の次元は

$$\left.\frac{1 + x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}\right|_r$$

である．よって示すべきことは

$$A(3, r) = \left.\frac{1 + x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}\right|_r$$

である．よって次の補題を示せば目標の定理が証明できる．

補題 9.18

$$\left.\frac{1 + x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}\right|_r = N(3, r)$$

$$= \left.\frac{(1-x^{r+1})(1-x^{r+2})(1-x^{r+3})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_q$$

ここで r が偶数 $2s$ のとき $q = 3s$ であり，r が奇数 $2s+1$ のとき $q = 3s+1$ である．

補題の証明．(場合 1)$r = 2s$ のとき．補題の左辺を計算すると，

$$\left.\frac{1 + x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}\right|_{2s} = \left.\frac{(1+x)(1+x^3)}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right|_{2s}$$

$$= \left.\frac{1 + x + x^3 + x^4}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right|_{2s}$$

ここで x についての奇数次数の項は計算に影響しないので

$$= \left.\frac{1 + x^4}{(1-x^4)^2(1-x^2)}\right|_{2s}$$

さらに x^2 を x に置き換えて x の s 次の係数を求めればよいので

$$= \left.\frac{1 + x^2}{(1-x)^2(1-x^2)}\right|_s$$

となる．次に右辺の計算を行う．

$$\left.\frac{(1-x^{2s+1})(1-x^{2s+2})(1-x^{2s+3})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s}$$

$$= \left.\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s} - \left.\frac{x^{2s+1} + x^{2s+2} + x^{2s+3}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s}$$

ここで第一項を計算する．

$$\left.\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s}$$

$$= \left.\frac{(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)}{(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s}$$

$$= \left.\frac{1 + x + 2x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6}{(1-x^3)^2(1-x^6)}\right|_{3s}$$

ここで分子は x の指数が 3 の倍数のところのみ計算に影響してくるから

$$= \left.\frac{1 + x^3 + x^6}{(1-x^3)^2(1-x^6)}\right|_{3s}$$

$$= \left.\frac{1 + x + x^2}{(1-x)^2(1-x^2)}\right|_s$$

第二項は
$$= \left.\frac{x^{2s+1}+x^{2s+2}+x^{2s+3}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s}$$
これを x^{2s} で割って s 次の係数をみたものに等しいから
$$= \left.\frac{x(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{s} = \left.\frac{x(1-x)(1+x+x^2)}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{s}$$
$$= \left.\frac{x(1-x^3)}{(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{s} = \left.\frac{x}{(1-x)^2(1-x^2)}\right|_{s}$$
よってまとめて右辺は
$$= \left.\frac{1+x^2}{(1-x)^2(1-x^2)}\right|_{s}$$
となり左辺と一致する．

(場合 2) $r = 2s+1$ のとき．
$$\left.\frac{1+x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}\right|_{2s+1} = \left.\frac{(1-x^{2s+2})(1-x^{2s+3})(1-x^{2s+4})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s+1}$$
を示せばよい．左辺から計算する．
$$\left.\frac{1+x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}\right|_{2s+1} = \left.\frac{x+x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^4)}\right|_{2s+2}$$
$$= \left.\frac{(1+x)(x+x^4)}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right|_{2s+2} = \left.\frac{x+x^2+x^4+x^5}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right|_{2s+2}$$
$$= \left.\frac{x^2+x^4}{(1-x^2)^2(1-x^4)}\right|_{2s+2} = \left.\frac{x+x^2}{(1-x)^2(1-x^2)}\right|_{s+1}$$
次に右辺を計算する．右辺
$$= \left.\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s+1} - \left.\frac{x^{2s+2}+x^{2s+3}+x^{2s+4}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s+1}$$
第一項は
$$\left.\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s+1} = \left.\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s+3}$$
$$= \left.\frac{x^2(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)}{(1-x^3)^2(1-x^6)}\right|_{3s+3}$$
$$= \left.\frac{x^2(1+x+2x^2+x^3+2x^4+x^5+x^6)}{(1-x^3)^2(1-x^6)}\right|_{3s+3}$$
分子の x の指数が 3 の倍数の項のみ計算に影響を及ぼすから
$$= \left.\frac{x^3+2x^6}{(1-x^3)^2(1-x^6)}\right|_{3s+3} = \left.\frac{x+2x^2}{(1-x)^2(1-x^2)}\right|_{s+1}.$$
第二項は
$$\left.\frac{x^{2s+2}+x^{2s+3}+x^{2s+4}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{3s+1} = \left.\frac{x^2(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}\right|_{s+1}$$
$$= \left.\frac{x^2}{(1-x)^2(1-x^2)}\right|_{s+1}$$
よって右辺をまとめると
$$\left.\frac{x+x^2}{(1-x)^2(1-x^2)}\right|_{s+1}$$
となり左辺と等しい．

これにより必要なことが全て示され目標としていた定理の証明が終わり，この本の目的が達成された．

系 9.19　三次形式の不変式は必ず判別式 d で割り切れる．

証明. 定理で得られた 4 つの共変式を半不変式とみると, 不変式になっているものは d のみである.

注意 9.20 最後に代数幾何の知識がある人に幾何的な解釈を述べておく[*20]. 三次形式は $\mathbb{P}^1$ 上の次数 3 の有効因子を定める. 一次変換で不変なものを探すということは $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点配置のモジュライを求めるということである. よく知られているように射影一次変換で任意の異なる 3 点は $(1:0),(1:1),(0:1)$ に移せる. したがって 3 点配置のモジュライ空間は一点でなければならない. これは不変式が d のみで $\mathrm{Proj}(\mathbb{C}[d])$ が一点であることと対応している. このように 2 元不変式論は $\mathbb{P}^1$ 上の点の配置空間のモジュライと密接に関係している.

❾ 付録. リー環 $\boldsymbol{sl}(2)$ の表現論

Cayley-Sylvester の個数定理を証明する際に必要になる $sl(2)$ の表現論をここで解説しよう. リー環はそもそもこの個数定理から発祥したものであるから, 我々は最も由緒正しいリー環の入門をしようとしているのである. ここでリー環についてさらに興味が湧いた方は [4] を読まれるとよい. なおここではベクトル空間はすべて複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える.

定義 10.21 V をベクトル空間とし, 任意の $X,Y\in V$ が与えられたとき $[X,Y]\in V$ が定まり（これをリー積と呼ぶ）次の条件を満たすとき $(V,[,])$ をリー環と呼ぶことにする:

- $[X,Y]$ は X と Y について線形である.
- $[Y,X]=-[X,Y]$ である.
- 任意の $X,Y,Z\in V$ に対して $[X,[Y,Z]]+[Y,[X,Z]]+[Z,[X,Y]]=0$ が成り立つ. この等式をヤコビの恒等式と呼ぶ.

例. $sl(2)$ の基となるベクトル空間を 2 行 2 列の行列でトレースが 0 となるもの全体とする. 即ち
$V=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} :\ a+d=0\right\}$ として $X,Y\in V$ に対して, $[X,Y]=XY-YX$ と通常の行列の演算で定めれば $sl(2)=(V,[,])$ はリー環となる. 慣れない読者は一度自分の手で確認してほしい. 確認すべきことは $XY-YX$ のトレースが 0 であるかということと, 上記のリー積の性質が満たされているかということである.
例. V をベクトル空間とするとき, V から V への線形写像全体 $\mathrm{Hom}(V,V)$ を基のベクトル空間とし $f,g\in\mathrm{Hom}(V,V)$ に対して $[f,g]=fg-gf$ とリー積を定めれば $gl(V)=(\mathrm{Hom}(V,V),[,])$ というリー環が定まる.
　次にリー環の間の準同型を定義する[*21].

定義 10.22 $g=(V_1,[,]_1),h=(V_2,[,]_2)$ を二つのリー環とする. $f:g\to h$ がリー環の準同型であるとは, $f:V_1\to V_2$ が線形写像で, 任意の $X,Y\in V_1$ に対して $f([X,Y]_1)=[f(X),f(Y)]_2$ が成り立つことと定義する.
g,h が同型であるとは, リー環の準同型 $f:g\to h$ と $g:h\to g$ が存在して, ベクトル空間の写像として $g\circ f=\mathrm{id}_g$, $f\circ g=\mathrm{id}_h$ が成り立つことと定義する.

定義 10.23 $g=(V_1,[,]_1),h=(V_2,[,]_2)$ を二つのリー環とする. このとき g,h の直和 $g\bigoplus h$ を, ベクトル空間としては $V_1\bigoplus V_2$ と定める. 次にリー積を定める. $X_1,Y_1\in V_1$, $X_2,Y_2\in V_2$ に対して $[(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)]=([X_1,Y_1]_1,[X_2,Y_2]_2)$ として直和のリー積を定義する. 三つ以上のリー環の直和は順次直和をとっていくことで定義する[*22].

　次にリー環のベクトル空間への表現を定義する.

定義 10.24 g をリー環とし, V をベクトル空間とする. g の V への表現を, $\rho:g\to gl(V)$ なるリー環の準同型と定義する. V は表現空間と呼ばれる. V が有限次元のとき, 有限次表現と呼ぶ. 表現を (ρ,V) と表記することが多い.
　表現 (ρ,V) が与えられているとする. W を V の部分ベクトル空間とする. W が ρ の不変部分空間であるとは, 任意の $X\in g$ に対して $\rho(X)W\subseteq W$ が成り立つことと定義する.
　$V,\{0\}$ 以外に不変部分空間が存在しないとき表現 ρ は既約であると言われる.

[*20] 代数幾何を知らないひとはこの箇所は無視してよい.
[*21] 考察する対象を定めたら, 次はそれらの間の準同型 (構造を保つ写像のこと) を定めるというのが数学の一般的な考え方である. この考え方は圏論へと昇華されていく.
[*22] 直和をとる順序に依らないことが知られている.

不変部分空間 W に対して, 新しい表現 (ρ, W) が自然に定まることに注意する.

この節の最初の目標は, $sl(2)$ の任意の有限次表現は, 有限個の既約表現の直和と同型になり, 既約表現はその表現空間の次元により一意的に決定されるということを示す事である. 次の目標は, その理論を多項式の斉次部分空間に適用して直和分解を与え, 精密な次元のカウントを可能にすることである. この方針により Cayley-Sylvester の個数定理は証明される.

$sl(2)$ にベクトル空間としての基底を次のように与える:

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

計算から直接

$$[X, Y] = H, [H, X] = 2X, [H, Y] = -2Y$$

が示される. 我々はこの関係式に見覚えがある. それは Cayley-Aronhold の微分作用素の間に成り立つ式との類似である. つまり多項式環 $\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3]$ を表現空間とする $sl(2)$ の表現が次のように入る:

$$\rho : aH + bX + cY \mapsto a\mathcal{H} + b\mathcal{D} + c\Delta \in gl(\mathbb{C}[a_0, a_1, a_2, a_3]).$$

この意味において Cayley-Aronhold の微分作用素とその間に立つ関係式が重要なのである. 更に, $V_{3,d}$ を $\mathbb{C}[a_0, \cdots, a_3]$ の d 次斉次部分空間とすると, Cayley-Aronhold の微分作用素 $\mathcal{H}, \mathcal{D}, \Delta$ は多項式の次数を不変にするので $V_{3,d}$ は $sl(2)$ の有限次不変部分空間であり, 従ってここに $sl(2)$ の有限次表現が自然に誘導される.

次に $sl(2)$ の既約表現を全て決定する. (ρ, V) を有限次表現とする. $v \in V$ を $\rho(H)$ の固有ベクトル, $\lambda \in \mathbb{C}$ をその固有値とする. このとき $\rho(X)v, \rho(Y)v$ も $\rho(H)$ の固有ベクトルである事をみる.

$$\begin{aligned} &\rho(H)\rho(X)v = \rho(X)\rho(H)v + \rho([H, X])v = \rho(X)\rho(H)v + \rho(2X)v = \rho(X)\rho(H)v + 2\rho(X)v \\ &= \lambda\rho(X)v + 2\rho(X)v = (\lambda + 2)\rho(X)v \end{aligned}$$

よって $\rho(X)v$ は v より固有値が 2 増えた固有ベクトルである.

$$\begin{aligned} &\rho(H)\rho(Y)v = \rho(Y)\rho(H)v + \rho([H, Y])v = \rho(Y)\rho(H)v - \rho(2Y)v = \rho(Y)\rho(H)v - 2\rho(Y)v \\ &= \lambda\rho(Y)v + 2\rho(Y)v = (\lambda - 2)\rho(Y)v \end{aligned}$$

よって $\rho(Y)v$ は v より固有値が 2 減った固有ベクトルである.
上記の v に対して $\rho(H)^l v, l = 0, 1, 2, \cdots$ は異なる固有値を持つから一次独立であるから, $\rho(H)^{l_0}v \neq 0$ かつ $\rho(H)^{l_0+1}v = 0$ なる自然数 l_0 が存在する. よって次の補題が成り立つ事が判った.

補題 10.25 有限次表現 (ρ, V) に対して次の条件を満たす $v \in V$ が存在する.

- $v \neq 0$
- $\rho(X)v = 0$
- v は $\rho(H)$ の固有ベクトル

このような v を ρ の原始元 (primitive element) と呼ぶ.

原始元 e_0 を一つとり $e_l = \frac{1}{l!}\rho(Y)^l e_0$ と定める. V が有限次元なので, $e_m \neq 0,\ e_{m+1} = 0$ となる m が存在する. この m を原始元 e_0 のレベルと呼び $\mathrm{level}(e_0)$ と表記する.

補題 10.26 上記の記号の下, 次が成り立つ.

- $\rho(H)e_l = (m - 2l)e_l$
- $\rho(X)e_l = (m - l + 1)e_{l-1}$
- $\rho(Y)e_l = (l + 1)e_{l+1}$

ここで $e_{-1} = 0$ とおいている.
また $e_0, e_1, \cdots, e_m$ で張られる $(m + 1)$ 次元ベクトル空間 W_m は既約不変部分空間である.

証明. e_l の定め方から

$$\rho(H)e_l = (\lambda - 2l)e_l,\ \rho(Y)e_l = (l + 1)e_{l+1}$$

が成り立つ．次に l に関する帰納法で

$$\rho(X)e_l = (\lambda - l + 1)e_{l-1}(l = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ事を示す．$l = 0$ のとき $\rho(X)e_0 = 0 = (\lambda + 1)e_{-1}$ となり成立している．l のとき成立すると仮定して

$$\begin{aligned}
&\rho(X)e_{l+1} = \tfrac{1}{l+1}\rho(X)\rho(Y)e_l \\
&= \tfrac{1}{l+1}([\rho(X), \rho(Y)]e_l + \rho(Y)\rho(X)e_l) \\
&= \tfrac{1}{l+1}(\rho(H)e_l + (\lambda - l + 1)\rho(Y))e_{l-1} \\
&= \tfrac{1}{l+1}((\lambda - 2l) + (\lambda - l + 1)l)e_l = (\lambda - l)e_l
\end{aligned}$$

となり $l + 1$ の場合でも成立する．$l = m + 1$ とおくと

$$0 = \rho(X)e_{m+1} = (\lambda - m)e_l$$

なので $\lambda = m$ を得る．よって原始元の固有値は必ず非負の整数である．

W_m は上記の関係式より不変部分空間となることが判るから, 既約性を示せばよい．$\rho(H)$ を W_m に制限したものの固有値は $m, m-2, m-4, \cdots, -m+2, -m$ であり, それぞれの固有値に対する固有空間は 1 次元であり, 対応する固有ベクトルは $e_0, e_1, \cdots, e_m$ である．もし W_m が既約でないとすれば, W_m の不変部分空間 U があって, $\rho(H)$ の U への制限の固有値は $\{m, m-2, m-4, \cdots, -m+2, -m\}$ の部分集合になるが, そのうち最大のものを $m - 2h$ とすると, e_h は U に属している．しかし

$$\rho(X)e_h = (m - h + 1)e_{h-1}$$

$$\rho(H)e_{h-1} = (m - 2h + 2)e_{h-1}$$

に注意すれば, $e_{h-1} \in U$ となり, しかも $h \neq 0$ なら, それに対応する $\rho(H)$ の固有値が $m - 2h$ より大きくなって矛盾が発生する．従って $h = 0$ となり $U = W_m$ を得る．証明終わり．

次に $sl(2)$ の $m + 1$ 次元の既約表現は W_m と同型になる事を見る．

命題 10.27 $(m + 1)$ 次元ベクトル空間 W_m, $(m \geq 1)$ の基底 $e_0, e_1, \cdots, e_m$ に対して H, X, Y の作用を $0 \leq l \leq m$ に対して

- $\rho_m(H)e_l = (m - 2l)e_l$
- $\rho_m(X)e_l = (m - l + 1)e_{l-1}$
- $\rho_m(Y)e_l = (l + 1)e_{l+1}$

で定めれば ρ_m, W_m は $sl(2)$ の既約表現を与える．ここで $e_{-1} = e_{m+1} = 0$ としている．

証明．ρ_m が表現を与える事を計算によって見る．

$$\begin{aligned}
&[\rho_m(X), \rho_m(Y)] = \rho_m(X)\rho_m(Y)e_l - \rho_m(Y)\rho_m(X)e_l \\
&= ((l + 1)(m - l) - (m - l + 1)l)e_l = (m - 2l)e_l = \rho_m(H)e_l
\end{aligned}$$

が成り立つ事が判る．次に

$$\begin{aligned}
&[\rho_m(H), \rho_m(X)]e_l = ((m - l + 1)(m - 2(l - 1)) - (m - 2l)(m - l + 1))e_{l-1} \\
&= 2\rho_m(X)e_l
\end{aligned}$$

が判る．更に

$$\begin{aligned}
&[\rho_m(H), \rho_m(Y)]e_l = ((l + 1)(m - 2(l + 1)) - (m - 2l)(l + 1))e_{l+1} \\
&= -2\rho_m(Y)e_l
\end{aligned}$$

が判る．e_0 は定め方から原始元であり, 補題 10.26 で見たように W_m は既約である事が判る．以上の議論から $sl(2)$ の既約表現はある (ρ_m, W_m) と同型であり, 次元により完全に一意に定まることが判った．

次の命題は Cayler-Sylvester の個数定理を証明する際に応用される．

命題 10.28 $\{e^{(1)}, e^{(2)}, \cdots, e^{(r)}\}$ を $sl(2)$ の有限次表現 (ρ, V) の 1 次独立な原始元の集合とする．$\mathrm{level}(e^{(i)}) = m_i$ とする．

$$e^{(i)}_{l_i} = \frac{1}{l_i!}\rho(Y)^{l_i}e^{(i)}$$

とおけば $e^{(i)}_{l_i}$, $(0 \leq l_i \leq m_i,\ 1 \leq i \leq r)$ は 1 次独立である．

証明. まず

$$\rho(X)^l e_l^{(i)} = (m_i - l + 1)\rho(X)^{l-1} e_{l-1}^{(i)}$$

であるからこれを次々に繰り返していけば,

$$\begin{aligned}
&= (m_i - l + 1)(m_i - l + 2)\rho(X)^{l-2} e_{l-2}^{(i)}) \\
&= \cdots \\
&= \frac{m_i!}{(m_i - l)!} e^{(i)}
\end{aligned}$$

となる事を念頭におく. そして非自明な 1 次関係式

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{l_i=0}^{m_i} \lambda_{i,l_i} e_{l_i}^{(i)} = 0$$

が存在すると仮定する. $\lambda_{i,l} \neq 0$ となる l の最大値を l_0 とおく. すると上の 1 次関係式に $\rho(X)^{l_0}$ を作用させれば

$$\rho(X)^{l_0} e_{l_i}^{(i)} = \frac{m_i!}{(m_i - l_0)!} e^{(i)} (l_i = l_0)$$

となり $l_i < l_0$ の場合は上記の右辺は 0 となることを用いれば,

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i!}{(m_i - l_0)!} \lambda_{i,l_0} e^{(i)} = 0$$

となるが, これは $e^{(0)}, e^{(1)}, \cdots, e^{(r)}$ の 1 次独立性に反し矛盾が生じる.

もし $sl(2)$ の任意の有限次表現 (ρ, V) が必ず有限個の既約表現の直和と同型となるなら, 上記の命題より V の次元のカウントは V の原始元を求めることに帰着する. 逆にいうと V の次元が判っているとき 1 次独立な原始元の個数を求める事が可能となる. 任意の有限次表現が既約表元の直和となるようなリー環を半単純 (semi-simple) なリー環と呼ぶが $sl(2)$ は半単純なのである. それをこれから証明しよう[*23].

定理 10.29 $e^{(1)}$ を $sl(2)$ の有限次表現 (ρ, V) の原始元とし, W を e^1 を含む V 内の最小の不変部分空間とする. e' を商ベクトル空間 V/W の原始元とすれば, V の原始元 e であって, かつ e' を代表するようなものが存在する.

証明. まず W が不変部分空間である事から, V/W に自然に $sl(2)$ の表現が定まることに注意する. これを商表現と呼ぶ. $\mathrm{level}(e^{(1)}) = m_1$, $\mathrm{level}(e') = m$ とおく.

$$e_l^{(1)} = \frac{1}{l!}\rho(Y)^l e^{(1)} \ (0 \leq l \leq m_1)$$

とおくと, W は $e_0^{(1)}, \cdots, e_0^{(m_1)}$ で張られる. $v \in V$ を原始元とは限らない e' の代表元とすると,

$$\begin{aligned}
&[\rho(H)v] = [mv] \\
&[\rho(X)v] = 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $[\cdot]$ は商空間の同値類を意味している. よって

$$\begin{aligned}
&\rho(H)v = mv + \sum_{l=0}^{m_1} \lambda_l e_l^{(1)} \\
&\rho(X)v = \sum_{l=0}^{m_1} \mu_l e_l^{(1)}
\end{aligned}$$

が成り立つ. この v に W の元をうまく加えることにより V の原始元にするというのが我々の方針である[*24].

$$\rho(X) e_{l+1}^{(1)} = (m_1 - l) e_l^{(1)}$$

であるから

$$u = v - \sum_{h=0}^{m_1-1} \frac{\mu_h}{m_1 - h} e_{h+1}$$

とおくと

$$\rho(X)u = \sum_{l=0}^{m_1} \mu_l e_l^{(1)} - \sum_{h=0}^{m_1-1} \mu_h e_h^{(1)} = \mu_{m_1} e_{m_1}^{(1)}$$

となる. よって

[*23] この証明だけ大学一年生の線形代数の範囲を超えてしまうので難しく感じる人は $sl(2)$ が半単純であることを認めて次にスキップしてもよい. 必要な知識はベクトル空間の部分空間による商についての一般論である. 勉強したい人は佐竹一郎著, 線形代数学, 裳華房を参照のこと.

[*24] コホモロジーを計算するときによく似ている. このあたりにコホモロジー理論の起源の一つがあると思われる. またこの定理は半単純なリー環の 1 次コホモロジーが消滅するということに一般化される.

$\rho(H)u = mu + \sum_{l=0}^{m_1} \nu_l e_l^{(1)}$

$\rho(X)u = \mu e_{m_1}^{(1)}$

と書ける．$\rho(X)u$ が $\rho(X)v$ に比べて格段にシンプルになった事が大事な点である．実は $e_0^{(1)}, \cdots, e_{m_1}^{(1)}$ の 1 次独立性から u はさらにシンプルな形をしていなければならない事が次の議論から判る．

$2\mu e_{m_1}^{(1)} = 2\rho(X)u = [\rho(X), \rho(Y)]u$

$= \rho(H)\rho(X)u - \rho(X)\rho(H)u$

$= \mu\rho(H)e_{m_1}^{(1)} - \rho(X)(mu + \sum_{l=0}^{m_1} \nu_l e_l^{(1)})$

$= (-m_1\mu - m\mu)e_{m_1}^{(1)} - \sum_{l=1}^{m_1} \nu_l(m_1 - l + 1)e_{l-1}^{(1)}$

であるから $e_l^{(1)}$ の係数を比べて

$(2 + m_1 + m)\mu = 0$

$\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_{m_1} = 0$

を得る．$(2 + m_1 + m)$ は正の整数だから 0 ではないので $\mu = 0$ を得る．よって

$\rho(H)u = mu + \nu_0 e^{(1)}$

$\rho(X)u = 0$

が成り立っている．$\nu_0 = 0$ となるように u を調節できれば原始元を得ることができることが判るのでそれを目標とする．ここで場合分けが必要になる．(場合 1) は $m \neq m_1$ のとき, (場合 2) は $m = m_1$ のときである．(場合 1) では u をさらに調節する必要がある．(場合 2) では u 自身が既に原始元であることを見る．

(場合 1).

$$e = u + \frac{\nu_0}{m - m_1}e^{(1)}$$

とおく．

$\rho(H)e = \rho(H)u + \frac{\nu_0}{m-m_1}\rho(H)e^{(1)}$

$= mu + \nu_0 e^{(1)} + \frac{\nu_0 m_1}{m-m_1}e^{(1)}$

$= me - \frac{\nu_0 m}{m-m_1}e^{(1)} + \nu_0 e^{(1)} + \frac{\nu_0 m_1}{m-m_1}e^{(1)}$

$= me$

となる[*25]．また $\rho(X)e^{(1)} = 0$ なので $\rho(X)e = 0$ となっている．従って e は原始元であり, e' を代表している．

(場合 2). u が既に原始元でとなっていることを見る．そのためには $\nu_0 = 0$ を示せばよい．まず準備として $\rho(Y)^l u$ の $\rho(H)$ による像を見る．

$$\rho(H)\rho(Y)^l u = (m - 2l)\rho(Y)^l u + \nu_0\rho(Y)^l e^{(1)}$$

これを l に関する帰納法で示す．$l = 0$ のときは成り立っている．l のときを仮定して $l + 1$ のときを考える．

$\rho(H)\rho(Y)^{l+1}u = [\rho(H), \rho(Y)]\rho(Y)^l u + \rho(Y)\rho(H)\rho(Y)^l u$

$= -2\rho(Y)^{l+1}u + (m - 2l)\rho(Y)^{l+1}u + \nu_0\rho(Y)^{l+1}e^{(1)}$

$= (m - 2(l + 1))\rho(Y)^{l+1}u + \nu_0\rho(Y)^{l+1}e^{(1)}$

従って上の式が示された．この式を $l = m + 1$ として適用すれば, $m = m_1$ に注意して

$\rho(H)\rho(Y)^{m+1}u = (m - 2(m + 1))\rho(Y)^{m+1}u + \nu_0\rho(Y)^{m+1}e^{(1)}$

$= -(m + 2)\rho(Y)^{m+1}u$

となる．$\rho(H)$ を W に制限すればその固有値は $m, m - 2, \cdots, -m + 2, -m$ であり $\rho(Y)^{m+1}u \in W$ であるから $\rho(Y)^{m+1}u = 0$ となる．さらに

$XY^{m+1} = ([X, Y] + YX)Y^m = (H + YX)Y^m = HY^m + YXY^m$

$= HY^m + Y(H + YX)Y^{m-1}$

$= \cdots$

$= \sum_{l=0}^{m} Y^{m-l}HY^l$

[*25] $e = u + \alpha e^{(1)}$ と未知数 α を設定して原始元になるように方程式を解きその解 α を天下り的に与えている.v から u を求めたときも同様である．疑問に思う読者がいれば実際に方程式を立てて解いてみていほしい．大事な事はそのような方程式の解が存在することである．

に注意すると,

$0=\rho(X)\rho(Y)^{m+1}u=\sum_{l=0}^{m}\rho(Y)^{m-l}\rho(H)\rho(Y)^{l}u$

$=\sum_{l=0}^{m}(m-2l)\rho(Y)^{m}u+\nu_0\sum_{l=0}^{m}\rho(Y)^{m-l}\rho(Y)^{l}e^{(1)}$

$=(m(m+1)-2\sum_{l=0}^{m}l)\rho(Y)^{m}u+(m+1)\nu_0\rho(Y)^{m}e^{(1)}$

$=(m+1)\nu_0\rho(Y)^{m}e^{(1)}$

よって $\nu_0=0$ となり u が求めるものである事が判った. 証明終わり.

定理 10.30 $sl(2)$ の任意の有限次表現 (ρ,V) は有限個の既約表現の直和と同型である. 即ち $sl(2)$ は半単純である.

証明. $e^{(1)},\cdots,e^{(r)}$ を V の 1 次独立な原始元の集合で, 極大なものとする. $\mathrm{level}(e^{(i)})=m_i$ とする.

$$e_{l_i}^{(i)}=\frac{1}{l_i}\rho(Y)^{l_i}e^{(i)}\ (0\leq l_i\leq m_i,\ 1\leq i\leq r)$$

とおく. W_i を $e_0^{(i)},\cdots,e_{m_i}^{(i)}$ で張られる部分空間とすると

$$W_1\bigoplus\cdots\bigoplus W_r$$

は V の不変な部分空間であり既約な表現の直和である. これが V と一致することを示せばよい. 従って V の任意の元 v が, 原始元およびそれらに $\rho(Y)$ を何度か作用させたものの有限和として書けることを示せばよい. このことを $n=\mathrm{V}$ に関する帰納法で示す. $n=1$ のときは既約であり (ρ_0,W_0) と同型であるから確かに正しい. n 以下については主張が正しいとして $n+1$ の場合を示す. V/W_1 の 1 次独立な原始元の極大集合を $f'^{(1)},\cdots,f'^{(s)}$ とすると, V の原始元 $f^{(i)}$ を $f'^{(i)}$ を代表するようにとれる. 帰納法の仮定から V/W_1 の元は $f'^{(1)},\cdots,f'^{(s)}$ に $\rho(Y)$ を何度か作用させた元の有限和で書けるから, V の任意の元が

$$f^{(1)},\cdots,f^{(s)},e^{(1)}$$

に $\rho(Y)$ を何度か作用させた元の有限和として表せることが判った. 証明終わり.

以上の議論を $\mathbb{C}[a_0,\cdots,a_3]$ の d 次斉次空間 $V_{3,d}$ に適用する. 以前に述べたように Cayley-Aronhold の微分作用素によって $V_{3,d}$ は $sl(2)$ の表現空間となっている. $\varphi(a)\in V_{3,d}$ が原始元であるということは

$\mathcal{H}\varphi(a)=m\varphi(a)$

$\mathcal{D}\varphi(a)=0$

となる事であるが, 最初の式は自動的に成り立っているので, 二番目の式が成り立っている事が原始元であることと同値であり, それは $\varphi(a)$ が半不変式である事と同値である. 従って $V_{3,d}$ の原始元全体は

$$\bigoplus_p\mathcal{S}_3(d,p)-\{0\}$$

となっている. ここで $p=\frac{1}{2}(3d-m)$ を動く. 目標とするのは次の定理である. $V_{3,d,p}$ は d 同次 p 同重多項式のなす $V_{3,d}$ の部分空間であったことに注意する.

定理 10.31 $\mathrm{dim}\mathcal{S}_3(d,p)=\mathrm{dim}V_{3,d,p}-\mathrm{dim}V_{3,d,p-1}$

証明. $V_{3,d}$ の原始元全体は $\bigoplus_p\mathcal{S}_3(d,p)-\{0\}$ であるから, $V_{3,d}$ の 1 次独立な原始元の極大集合 $\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ は $\cup_p\mathcal{S}_n(d,p)$ から取り出すことができる. よって $\rho(Y)=\Delta$ であることに注意すると

$$V_{3,d,p}=\bigoplus_{0\leq l\leq p}\Delta^{l}\mathcal{S}_n(d,p-l)$$

$$V_{3,d}=\bigoplus_{0\leq p\leq 3d/2}\bigoplus_{0\leq l\leq p}\Delta^{l}(d,p-l)$$

を得る. 命題 10.28 を用いると

$$\mathrm{dim}\Delta^{l}\mathcal{S}_n(d,p)=\begin{cases}\mathrm{dim}\mathcal{S}_3(d,p)\ (0\leq l\leq 3d-2p)\\ 0\ (3d-2p<l)\end{cases}$$

であり, $l\leq 2l\leq 3d-2p+2l=3d-2(p-l)$ に注意して

$\dim V_{3,d,p} = \sum_{l=0}^{p} \dim \Delta^l \mathcal{S}_3(d, p-l)$
$= \sum_{l=0}^{p} \dim \mathcal{S}_3(d, p-l)$ $(0 \leq p \leq 3d-2p)$

よって

$$\dim \mathcal{S}_3(d,p) = \dim V_{3,d,p} - \dim V_{3,d,p-1}$$

を得る．証明終わり．

以上により付録の目的は達成された．

■あとがき

どうも ProjectiveX です．いかがだったでしょうか．古典とはいえ刺激的だったのではないでしょうか? この 19 世紀の理論は現在, モジュライ空間の構成など多岐にわたり発展応用されています．現代数学を学んでいる人は, 故郷を見つけた喜びを感じるかもしれませんし, これから学ぶ人にはバックボーンになるかもしれません．是非, 参考文献をみて勉強を進めてください．本書の直接の続きを読みたい方は [2], [3] を参照してみてください．代数幾何への応用を学びたい方は [5], [6] を参照してください．この本は読者への起爆剤として書いたとはじめに述べましたが, 筆者自身もこれを書くことによって刺激を受け, 不変式論の分野で論文を書くことになりました（ニートですが）．現代でもやるべき仕事はたくさんあります．

なお誤植等の訂正がある場合は暗黒通信団のホームページに載せます．計算ソフトにさせた計算を載せた方がよいという意見もありますので, 時間に余裕があればそれもホームページに載せるかもしれません．

最後に, 著者はこの本を, もちろん若くて情熱的で様々な可能性に満ちた高校生や大学生に捧げているのですが, 誰からも相手にされなくなったニートであるが実は才能を埋もれさせている人にも捧げています．数学はそういう人達によっても発展されうるし, 実際にそうされてきたのですから．

◆参考文献

[1] 高木貞治, 代数学講義, 改訂新版, 共立出版

[2] Edwin. B. Elliott, An Introduction to the Algebra of Quantics, Oxford at the clarendon press, 1913.

[3] 森川　寿, 不変式論, 紀伊国屋数学叢書１１

[4] 松島　与三, リー環論, 共立出版.

[5] Mumford, Forgaty, Kirwan, Geometric Invariant Theory, 3rd ed. Springer-Verlag, 1994.

[6] Dolgachev, Lectures on Invariant Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series.

古典的不変式論・入門編

2011 年 **8** 月 **14** 日 第一版
2012 年 **8** 月 **12** 日 第二版
2012 年 **11** 月 **30** 日 第二版二刷（誤植訂正）
2015 年 **7** 月 **14** 日 **PDF** 公開版
著　者　**Projective X**（ぷろじぇくてぃぶえっくす）
発行者　星野 香奈（ほしのかな）
発行所　同人集合　暗黒通信団（http://www.mikaka.org/~kana/）

ゼミなどで活用下さい。ご指摘ご感想などお待ちしております。